Exercice 1 *(10 points)*

Considérons une économie comportant deux ménages (1 et 2) et deux biens (X et Y). Les préférences des ménages sont telles que :

$$U_1 = X_1(Y_1)^{1/2}$$
$$U_2 = X_2\, Y_2$$

Les quantités disponibles sont telles que :

X= 20 et Y= 10

a) Ecrivez le programme de maximisation du consommateur 1 permettant d'atteindre un optimum de Pareto. *(2 points)*

Max $U_1 = X_1(Y_1)^{1/2}$
s.c$_1$ $\overline{U_2} = U_2$
s.c$_2$ $\bar{X} = X_1 + X_2$
s.c$_3$ $\bar{Y} = Y_1 + Y_2$

Lagrangien

$$L = X_1(Y_1)^{1/2} + \gamma(X_2\, Y_2 - \overline{U_2}) + \mu_1(20 - X_1 - X_2) + \mu_2(10 - Y_1 - Y_2)$$

Condition de premier ordre :

$$\frac{dL}{dX_1} = (Y_1)^{1/2} - \mu_1 = 0 \qquad \frac{dL}{dY_1} = \frac{1}{2}(Y_1)^{-1/2} - \mu_2 = 0$$

$$\frac{dL}{dX_2} = \gamma Y_2 - \mu_1 = 0 \qquad \frac{dL}{dY_2} = \gamma X_2 - \mu_2 = 0$$

$$\frac{dL}{d\mu_1} = 20 - X_1 - X_2 = 0 \qquad \frac{dL}{d\mu_2} = 10 - Y_1 - Y_2 = 0$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{2Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2}$$

b) A partir de la question a), déterminez la courbe de contrats et tracez-la. *(3 points)*

Utilisation des contraintes de quantités disponibles :

$$\text{TMS}_1 = \text{TMS}_2$$

$$\frac{2Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2} = \frac{10 - Y_1}{20 - X_1}$$

$$2Y_1\,(20 - X_1) = X_1(10 - Y_1)$$

$$40Y_1 - 2Y_1X_1 = 10X_1 + Y_1X_1$$

$$40Y_1 - Y_1X_1 = 10X_1$$

$$Y_1(40 - X_1) = 10X_1$$

Courbe des contrats :

$$Y_1 = \frac{10X_1}{(40 - X_1)}$$

Pour la tracer :

- Définir des points :

Si $X_1 = 0$; $Y_1 = 0$
Si $X_1 = 20$; $Y_1 = 10$
Si $X_1 = 15$; $Y_1 = 6$

- Définir la forme de la courbe :

$$\frac{dY_1}{X_1} = \frac{-400}{(40-X_1)^2} < 0 \text{ Décroissante}$$
$$\frac{d^2Y_1}{X_1} = \frac{-800}{(40-X_1)^3} < 0 \text{ Concave}$$

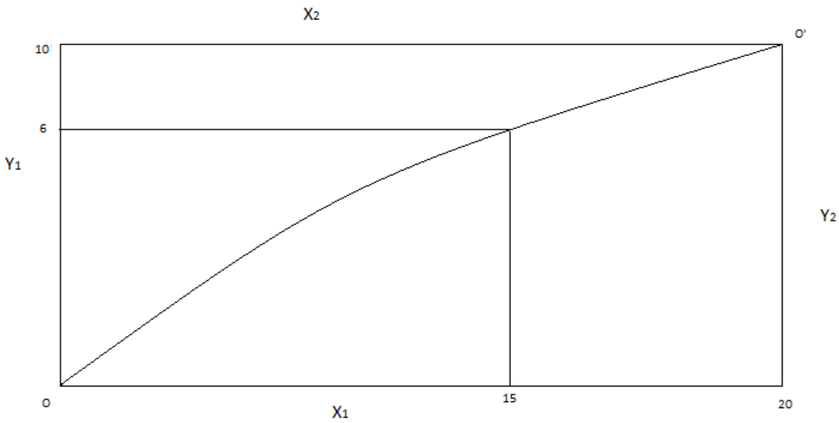

Diagramme d'Edgeworth

c) On suppose que les ressources (W_i) en biens X et Y détenues par les consommateurs 1 et 2 sont respectivement :

$$W_1 = (15, 6) \text{ et } W_2 = (5, 4)$$

Déterminez le rapport des prix q= $\frac{p_Y}{p_X}$ ainsi que les quantités consommées par les individus au point d'équilibre. Commenter. *(3 points)*

Max $U_1 = X_1(Y_1)^{1/2}$
s.c. $p_X X_1 + p_Y Y_1 = 15\, p_X + 6\, p_Y$

$$\text{TMS}_1 = \frac{(Y_1)^{1/2}}{\frac{1}{2}(Y_1)^{-1/2}X_1} = \frac{2Y_1}{X_1} = \frac{p_X}{p_Y} = \frac{1}{q}$$

Utilisation de la contrainte budgétaire pour exprimer X_1en fonction de Y_1:

$$X_1 = 15 + 6q - qY_1$$

Intégration dans l'égalité entre TMS et rapport des prix

$$\frac{2Y_1}{15+6q-qY_1} = \frac{1}{q}$$

$$2Y_1 = \frac{15}{q} + 6 - Y_1$$

$$Y_1 = \frac{5}{q} + 2$$
Et donc
$$X_1 = 10 + 4q$$

Max $U_2 = X_2 Y_2$
s.c. $p_X X_2 + p_Y Y_2 = 5\, p_X + 4\, p_Y$

$$\text{TMS}_2 = \frac{Y_2}{X_2} = \frac{p_X}{p_Y} = \frac{1}{q}$$

Utilisation de la contrainte budgétaire pour exprimer X_1en fonction de Y_1:
$$X_2 = 5 + 4q - qY_2$$

Intégration dans l'égalité entre TMS et rapport des prix

$$\frac{Y_2}{5+4q-qY_2} = \frac{1}{q}$$

$$Y_2 = \frac{5}{q} + 4 - Y_2$$

$$Y_2 = \frac{5}{2q} + 2$$
Et donc
$$X_2 = \frac{5}{2} + 2q$$

Utilisation des quantités de biens disponibles dans l'économie :

$$X_1 + X_2 = 20$$
$$10 + 4q + \frac{5}{2} + 2q = 20$$
$$6q = \frac{15}{2}$$

$$q = \frac{5}{4}$$

Quantités d'équilibre

$$Y_1 = \frac{5}{5/4} + 2 = 6$$

$$X_1 = 10 + 4\left(5/4\right) = 15$$

$$Y_2 = \frac{5}{2(5/4)} + 2 = 4$$
Et donc
$$X_2 = \frac{5}{2} + 2\left(5/4\right) = 5$$

d) Montrez que cet équilibre est un optimum de Pareto. Quel théorème cela permet-il de vérifier ? (Enoncez-le) *(2 points)*

Pour cela, il faut utiliser l'équation de la courbe des contrats et y intégrer les quantités d'équilibre. Si l'équation est vérifiée alors l'équilibre est un optimum de Pareto (1er théorème du bien-être, voir fiche de lecture).

Exercice 2 *(6 points)*

Supposons que des études scientifiques vous fournissent les informations suivantes concernant les avantages et les coûts des émissions de dioxyde de souffre :

Avantages marginaux liés à la réduction des émissions :

$$A_m = 500 – 20A$$

Coûts liés à la réduction des émissions :

$$C_m= 200 + 5A$$

A est la quantité d'émissions réduites en millions de tonnes ; les avantages et coûts sont exprimés en euros par tonne.

a) Quel est le niveau socialement efficace de réduction des émissions ? *(2 points)*

$$A_m=C_m \Rightarrow 500 – 20A = 200 + 5A$$
$$A= 12$$

b) A ce niveau socialement optimal, quels sont les avantages marginaux et les coûts sociaux liés à la diminution des émissions ? *(2 points)*

$$A_m= 500 – 20*12= 260$$
Et
$$C_m= 200 + 5*12 = 260$$

c) Que se passe-t-il pour les avantages sociaux nets (avantages moins coûts) si vous fixez à 10 millions de tonnes la réduction des émissions ? Est socialement optimal ? Commentez. *(2 points)*

Avantages sociaux nets = (500-20*10)-(200+5*10) = 50

Le niveau socialement optimal est atteint lorsque les avantages nets d'une réduction de pollution sont égaux à zéro. Ici, il n'est pas atteint car il y a encore intérêt (50) à dépolluer.

Question de cours *(4 points)*

Rappelez comment se calcule le surplus pour un consommateur et donnez-en une représentation graphique.

Voir fiche lecture