ANNEXE 1. LA RESOLUTION DU PROGRAMME DU CONSOMMATEUR

ANNEXE1 : RESOLUTION DU PROGRAMME DU CONSOMMATEUR

1 – LE PROBLEME

Plus formellement, le programme du consommateur s'écrit :

$$\begin{array}{l} Max\,U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ s.c. \quad \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \leq R \end{array}$$

ce qui peut se réécrire

$$\begin{array}{l} Max\,U(x) \\ s.c. \quad px \leq R \end{array}$$

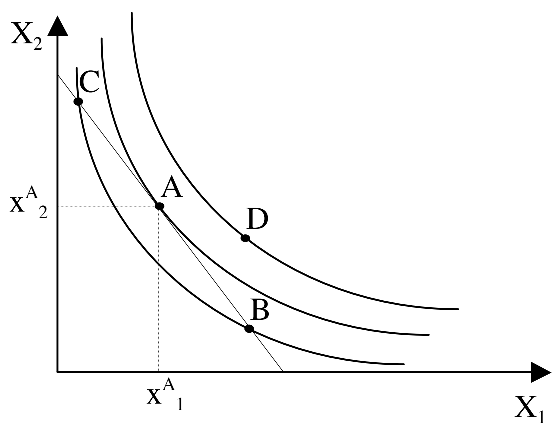
avec p le vecteur des N prix et x le vecteur des N biens.

Peut on avoir un optimum x* tel que px*<R ? Supposons que c'est le cas. Dans ce cas, il existe un panier de biens x suffisamment proche de x* et qui coûte également moins que R mais plus que x*. Le panier x est par exemple tel qu'il contient au moins plus d'un des biens que le panier x*. Si l'hypothèse de non-saturation (non-satiété) est vérifiée, cela signifie que le panier x est forcément préféré au panier x*. Le panier x* n'est donc pas un optimum. On obtient donc le résultat suivant : **sous l'hypothèse de non-saturation, le panier optimal est tel que le revenu est entièrement consommé**.

1.1. Résolution graphique

1.1.1. Cas général

Dans le cas de 2 biens, on peut déterminer graphiquement la solution de ce programme de maximisation.



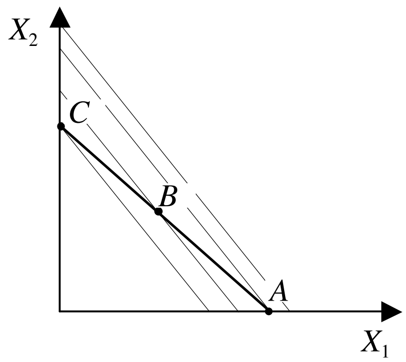
L'optimum du consommateur se situe en A. Bien que les paniers de biens B et C respectent la contrainte budgétaire, ils apportent une satisfaction moindre au consommateur. Inversement, bien que D corresponde à une satisfaction plus élevé que A, le consommateur ne peut l'atteindre car il doit respecter sa contrainte budgétaire.

Le choix optimal du consommateur est donc constitué par le panier de consommation qui tout en respectant la contrainte budgétaire est situé sur la courbe d'indifférence la plus élevée.

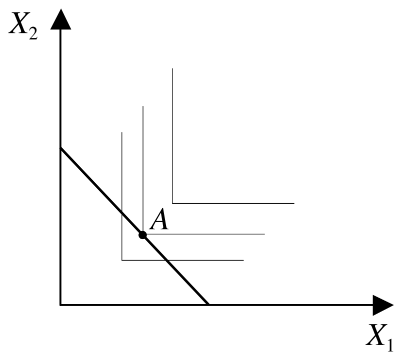
Le choix optimal correspond au point où la courbe d'indifférence est tangente à la droite de budget. En ce point, la courbe d'indifférence et la droite de budget ont la même pente ce qui signifie que l'on a l'égalité entre le taux marginal de substitution est le rapport des prix :

$$TMS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

1.1.2. Cas particuliers



Cas 1



Cas 2

Cas 1 : On est en présence de substituts parfaits. On a alors une solution en coin (point A). Le consommateur consacre tout son budget à l'achat du bien 1. C'est un résultat logique puisque le bien 1 (dans l'exemple) est le bien le moins cher. Comme les 2 biens sont des substituts parfaits, le consommateur va logiquement choisir le moins cher. Dans le cas où les 2 biens ont le même prix, le consommateur répartira indifféremment son revenu entre les 2 biens (graphiquement la courbe d'indifférence et la droite de budget seront confondues).

Cas 2 : On est en présence de complémentaires parfaits. Le choix optimal du consommateur doit toujours se situer sur la diagonale qui correspond à l'achat de quantités identiques des 2 biens et cela quel que soit leur prix respectif.

1.2. Résolution analytique

La résolution analytique d'un programme de maximisation sous contrainte passe par l'emploi de la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Dans le cas général avec N biens, on pose la fonction de Lagrange (ou lagrangien) suivante :

$$L = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(R - \sum_{i=1}^{N} p_i x_i)$$

où l est le multiplicateur de Lagrange ($\lambda \geq 0$).

Les conditions du 1er ordre de ce programme de maximisation sont :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \quad \forall i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - \sum_{i=1}^{N} p_i x_i = 0$$

Ces conditions du 1er ordre sont **nécessaires et suffisantes** pour que l'optimum du consommateur soit atteint lorsque les courbes d'indifférence sont strictement convexes (c'est-à-dire que la fonction d'utilité est strictement quasi-concave).

La 1ère condition peut se réécrire :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{p_i} = \lambda \quad \forall i$$

On obtient donc :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{p_i} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_j}}{p_j} = \lambda \quad \text{soit} \quad TMS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}$$

A l'équilibre du consommateur :

- **le taux marginal de substitution entre 2 biens est égal au rapport des prix de ces 2 biens**

- l'utilité marginale d'un bien consommé à l'équilibre est proportionnelle à son prix (car $\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i \quad \forall i$)

- le multiplicateur de Lagrange peut s'interpréter comme l'utilité marginale du revenu. Démonstration : Soit x*(p, R) la consommation d'équilibre (avec p le vecteur des prix). Une variation dR du revenu induit une variation de consommation de $dx^* = (dx_1^*, dx_2^*, \ldots, dx_n^*)$. La variation d'utilité correspondant à cette variation de consommation est $dU = \sum \frac{\partial U}{\partial x_i^*} dx_i^*$; Or comme $\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i \quad \forall i$, on a $dU = \lambda \sum p_i dx_i^*$. D'autre part, à l'équilibre l'ensemble du revenu étant dépensé, on a $R = \sum p_i x_i^*$ d©o? $dR = \sum p_i dx_i^*$. On obtient donc $dU = \lambda dR \text{ soit } \lambda = \frac{dU}{dR}$. Le multiplicateur de Lagrange représente l'utilité marginale du revenu.