TD 3 : LES DEUX THEOREMES DE L'ECONOMIE DU BIEN-ETRE

Récapitulatif : jusqu'ici on a défini les objectifs de la démarche, à la fois en termes d'efficacité (critère de Pareto) et d'équité (conception de type utilitariste de la justice). L'équité apparait comme la norme qui permet de choisir entre plusieurs allocations efficaces (optima de Pareto).
La question est maintenant de savoir quel système institutionnel / quel mode d'organisation va permettre d'assurer la réalisation de ces deux objectifs.
Remarque : dans notre approche, on réduit le choix institutionnel à une alternative : marché de concurrence parfaite / État.

Question 3.1. Premier théorème du bien-être.

Soit une économie d'échange à 2 biens (1 et 2) impliquant 2 individus (A et B). Les préférences des individus A et B sont décrites par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U^A(x_1^A, x_2^A) = \frac{1}{3}\log x_1^A + \frac{2}{3}\log x_2^A \qquad U^B(x_1^B, x_2^B) = \frac{1}{2}\log x_1^B + \frac{1}{2}\log x_2^B$$

où x_i^j désigne la consommation du bien i par l'individu j.

Les dotations initiales des agents sont $\omega^A = (1,3)$ et $\omega^B = (3,1)$.

On note p_1 et p_2 les prix des biens 1 et 2 et $q = \frac{p_2}{p_1}$.

a. *Déterminez l'allocation d'équilibre de cette économie. Pour cela, résolvez le programme d'optimisation de chaque consommateur, déterminez q et déduisez-en les quantités consommées au point d'équilibre.*

- Résolution du programme de maximisation du consommateur A :

Max. $U^A(x_1^A, x_2^A) = \frac{1}{3}\log x_1^A + \frac{2}{3}\log x_2^A$

s.c. $p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = p_1 + 3p_2$

On calcule le TMS : $$TMS_{21}^A = \frac{\dfrac{\partial U^A}{\partial x_1^A}}{\dfrac{\partial U^A}{\partial x_2^A}} = \frac{\dfrac{1}{3x_1^A}}{\dfrac{2}{3x_2^A}} = \frac{x_2^A}{2x_1^A}$$

On utilise la condition d'égalité du TMS au rapport des prix : $\frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{q}$

En utilisant la contrainte budgétaire, on exprime x_1^A en fonction de x_2^A afin de supprimer x_1^A de l'équation :

$$x_1^A = 1 + 3\frac{p_2}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}x_2^A = 1 + 3q - qx_2^A \qquad (1)$$

La condition d'égalité du TMS au rapport des prix devient :

$$\frac{x_2^A}{2(1+3q-qx_2^A)} = \frac{1}{q}$$

soit $x_2^A = \dfrac{2+6q-2qx_2^A}{q}$ $\Leftrightarrow$ $x_2^A = \dfrac{2}{q} + 6 - 2x_2^A$ $\Leftrightarrow$ $3x_2^A = \dfrac{2}{q} + 6$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x_2^A = \dfrac{2}{3q} + 2}$

On obtient ensuite x_1^A en utilisant (1) : $x_1^A = 1 + 3q - q(\dfrac{2}{3q} + 2)$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x_1^A = \dfrac{1}{3} + q}$

- Résolution du programme de maximisation du consommateur b : => idem

Max. $U^B(x_1^B, x_2^B) = \dfrac{1}{2}\log x_1^B + \dfrac{1}{2}\log x_2^B$

s.c. $p_1 x_1^{\mathbf{B}} + p_2 x_2^B = 3p_1 + p_2$

On calcule le TMS et on utilise la condition d'égalité du TMS au rapport des prix :

$$\frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{q}$$

En utilisant la contrainte budgétaire, on obtient : $x_1^B = 3 + q - qx_2^B$ (2)

La condition d'égalité du TMS au rapport des prix devient : $\dfrac{x_2^B}{3+q-qx_2^B} = \dfrac{1}{q}$

On trouve : $\boxed{x_2^B = \dfrac{3}{2q} + \dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{x_1^B = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}q}$

- Pour déterminer q, on utilise le fait qu'à l'équilibre, les quantités consommées sont égales aux quantités disponibles, soit sur le marché 1 (économie d'échange => les individus ne peuvent consommer que ce qui est disponible) : $x_1^A + x_1^B = 4$

Autrement dit (on remplace par les fonctions de demande) :

$\dfrac{1}{3} + q + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}q = 4$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{3}{2}q = 4 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{3}{2}q = \dfrac{13}{6}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{q = \dfrac{13}{9}}$

On vérifie facilement que, pour cette valeur de q, le marché du bien 2 est aussi en équilibre.

- On en déduit les quantités consommées au point d'équilibre : on remplace q par 13/9 dans les fonctions de demande

$\boxed{x_1^A = \dfrac{16}{9}}$ $\boxed{x_2^A = \dfrac{32}{13}}$ $\boxed{x_1^B = \dfrac{20}{9}}$ $\boxed{x_2^B = \dfrac{20}{13}}$

$\Rightarrow$ coordonnées du point d'équilibre dans le diagramme d'Edgeworth

b. *Déterminez l'équation de la courbe des contrats. Écrivez cette équation sous la forme* $x_2^A = f(x_1^A)$.

La définition de l'optimum de Pareto dans une économie d'échange peut s'exprimer de la manière suivante : l'utilité de l'individu A est maximale sous contrainte que celle de B soit maintenue à son niveau donné. Autrement dit, un optimum résulte d'un programme de type suivant :

Max. $U^A(x_1^A, x_2^A)$

s.c. $\overline{U}^B = U^B(x_1^B, x_2^B)$ (λ) ($\overline{U}^B$ *est donné)*

$\bar{x}_1 = x_1^A + x_1^B$ (μ_1) ($\bar{x}_1$ *est donné)*

$\bar{x}_2 = x_2^A + x_2^B$ (μ_2) ($\bar{x}_2$ *est donné)*

Résolution à l'aide d'un Lagrangien :

$$L = U^A(x_1^A, x_2^A) + \lambda\left[U^B(x_1^B, x_2^B) - \overline{U}^B\right] - \mu_1\left[x_1^A + x_1^B - \bar{x}_1\right] - \mu_2\left[x_2^A + x_2^B - \bar{x}_2\right]$$

En annulant les dérivées partielles, on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^A} = \frac{\partial U^A}{\partial x_1^A} - \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^B} = \lambda \frac{\partial U^B}{\partial x_1^B} - \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2^A} = \frac{\partial U^A}{\partial x_2^A} - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2^B} = \lambda \frac{\partial U^B}{\partial x_2^B} - \mu_2 = 0$$

En retravaillant ces équations, on trouve finalement : $\boxed{\dfrac{\frac{\partial U^A}{\partial x_1^A}}{\frac{\partial U^A}{\partial x_2^A}} = \dfrac{\frac{\partial U^B}{\partial x_1^B}}{\frac{\partial U^B}{\partial x_2^B}}}$ soit $\boxed{\dfrac{Um_1^A}{Um_2^A} = \dfrac{Um_1^B}{Um_2^B}}$ ou encore $\boxed{TMS_{21}^A = TMS_{21}^B}$

Comme on pouvait s'y attendre, la condition d'optimalité est l'égalisation des TMS des individus pour les deux biens considérés.

$$TMS_{21}^A = TMS_{21}^B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B} \qquad (3)$$

Par ailleurs, la somme des consommations des deux individus doit être égale à la quantité totale disponible et ceci pour chaque bien : $x_1^A + x_1^B = 4$ et $x_2^A + x_2^B = 4$

On en déduit : $x_1^B = 4 - x_1^A$ et $x_2^B = 4 - x_2^A$

En remplaçant dans (3) :

$$\frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{4 - x_2^A}{4 - x_1^A} \quad \Leftrightarrow \quad x_2^A(4 - x_1^A) = 2x_1^A(4 - x_2^A) \quad \Leftrightarrow \quad 4x_2^A - x_2^A x_1^A = 8x_1^A - 2x_1^A x_2^A$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2^A(4 - x_1^A + 2x_1^A) = 8x_1^A \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_2^A = \frac{8x_1^A}{4 + x_1^A}}$$

c. *L'allocation d'équilibre constitue-t-elle un équilibre de Pareto ? Expliquez.*
On vérifie que les coordonnées du point d'équilibre satisfont l'équation de la courbe des contrats :

Si $x_1^A = \frac{16}{9}$, alors $x_2^A = \frac{8 \times \frac{16}{9}}{4 + \frac{16}{9}} = \frac{\frac{128}{9}}{\frac{36+16}{9}} = \frac{128}{52} = \frac{32}{13}$

Les coordonnées du point d'équilibre satisfont l'équation de la courbe des contrats. L'allocation d'équilibre est un optimum de Pareto.

On pouvait s'y attendre puisque d'après le 1er théorème de la théorie du bien-être, un équilibre de CPP est un optimum de Pareto. Cela s'explique par le fait que les conditions de réalisation de l'équilibre (critère de maximisation de l'utilité des consommateurs) et celles de l'optimum (critère de Pareto) sont les mêmes (les TMS entre biens de tous les individus sont égaux => la définition de l'équilibre suppose l'égalisation des TMS de chaque individu au rapport des prix, et donc égalisation des TMS entre eux).
Dans un système de concurrence parfaite, **le prix (le rapport des prix) est un vecteur d'information parfait** qui permet d'égaliser les TMS de tous les individus et, de cette manière, conduit à l'optimum.
Remarque : Dans le cas de défaillances de marché (= chaque fois qu'une des hypothèses du théorème n'est pas remplie), le prix ne joue plus ce rôle de coordination des actions individuelles vers l'optimum (ex : externalités et biens collectifs => pas de marché, donc pas de prix attribué, monopole => le producteur profite de son pouvoir de marché pour fixer un prix « excessif » => le prix est « imparfait », il ne mène pas à l'optimum).

d. *Représentez la courbe des contrats, le point de dotations initiales et l'allocation d'équilibre dans un diagramme d'Edgeworth.*

- Les dotations initiales des agents sont $\omega^A = (1,3)$ et $\omega^B = (3,1)$. On peut donc facilement placer le point de dotations initiales A.
- Le point d'équilibre E est situé aux coordonnées suivantes :

$x_1^A = \frac{16}{9}$; $x_2^A = \frac{32}{13}$; $x_1^B = \frac{20}{9}$; $x_2^B = \frac{20}{13}$

- L'équation de la courbe de contrat est donnée par : $x_2^A = \frac{8x_1^A}{4 + x_1^A}$

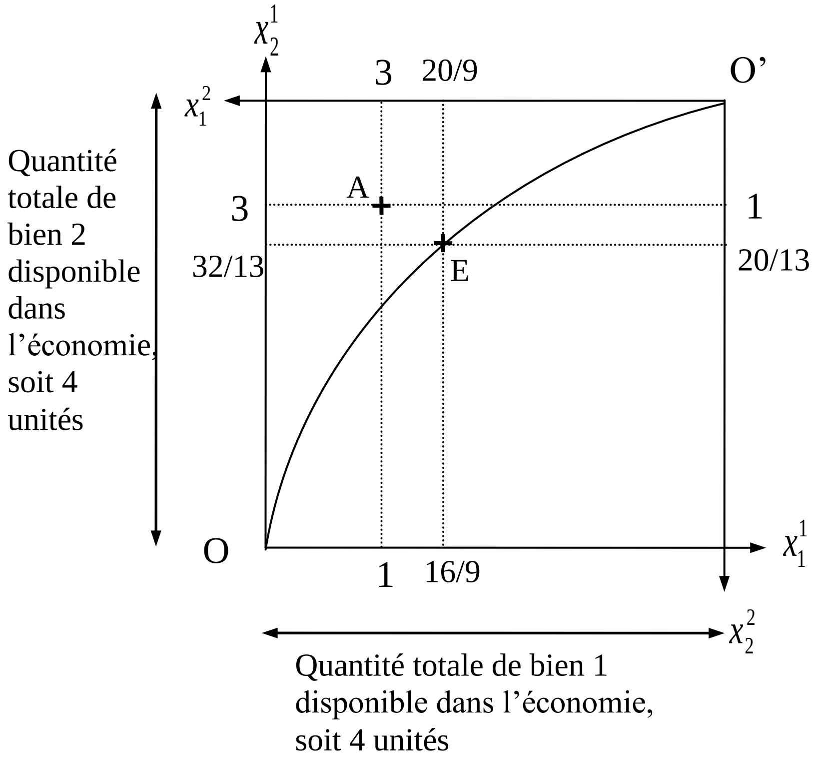
Quelle est sa forme ?

$\frac{dx_2^A}{dx_1^A} = \frac{8(4+x_1^A) - (8x_1^A \times 1)}{(4+x_1^A)^2} = \frac{32}{(4+x_1^A)^2} > 0$ => La courbe des contrats est croissante

$\frac{d^2 x_2^A}{(dx_1^A)^2} = \frac{-32 \times 2(4+x_1^A)}{(4+x_1^A)^4} = \frac{-64}{(4+x_1^A)^3} < 0$ => La courbe des contrats est concave

On peut chercher des points par lesquels elle passe :
Si $x_1^A = 0$, alors $x_2^A = 0$
Si $x_1^A = 4$, alors $x_2^A = \frac{32}{8} = 4$

La courbe des contrats passe donc par les origines O et O' des 2 systèmes d'axes.
On sait aussi par la question c) qu'elle passe par le point E.



Question 3.2. *Pouvez-vous définir en quelques mots le 2nd théorème du bien-être ? Qu'apporte-t-il de plus au 1er théorème du bien-être ? Qu'est-ce que l'optimum optimorum ? Peut-il être atteint ? Comment ?*

➔ Voir la fiche de cours pour le 1er et le 2nd théorème du bien-être