ANNEXE 2 – FONCTION IMPLICITE[1]

On sait souvent qu'existe une relation sans pour autant qu'on puisse la déterminer, la fonction est alors implicite.

Le théorème des fonctions implicites permet de déterminer certaines des caractéristiques de la relation inconnue (par exemple sa dérivée en un point). Nous nous plaçons dans le cas le plus simple, celui de la fonction à deux variables.

1.1 — Position du problème

Soit une relation liant deux variables x et y, y=f(x) ou f(x,y)=cste pour souligner que nous n'accordons pas plus d'importance à la variable x qu'a la variable y. C'est pourquoi on écrit encore $f(x_1,...,x_n) = cste$.

Une telle équation peut définir soit une relation entre x_1 et x_2 du type $x_2 = \phi(x_1)$ soit le contraire $x_1 = \varphi(x_2)$.

Nous avons donc deux fonctions implicites.

$f((x_1, \phi(x_1)) = cste$

$f((\varphi(x_2)x_1) = cste$

1.2 — Théorème des fonctions implicites

Soit une fonction f(.) de IR^2 dans IR de classe C^1 en un point (a_1, a_2). Si $f'_{x_2}(a_1, a_2) \neq 0$ alors dans un voisinage V$V \subset IR$ de a_1 l'équation $f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2)$ définit une fonction $\phi(.)$ de V dans IR, telle que :

---

[1] Voir Guerrien et al. « Mathématiques de la microéconomie » Economica ou un autre Guerrien.

$$\begin{cases} \phi(a_1) = a_2 \\ f\left(x_1, \phi(x_1)\right) = f\left(a_1, a_2\right) \ \forall x_1 \in V \end{cases}$$

De manière analogue, si $f'_{x_1}(a_1, a_2) \neq 0$ il existe dans le voisinage W de a_2 une fonction $\varphi(.)$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(a_2) = a_1 \\ f\left(\varphi(x_2), x_2\right) = f\left(a_1, a_2\right) \ \forall x_2 \in W \end{cases}$$

Il revient au modélisateur de choisir entre $\phi(.)$ et $\varphi(.)$ en fonction du problème étudié.

1.3 — Exemple : la courbe d'indifférence

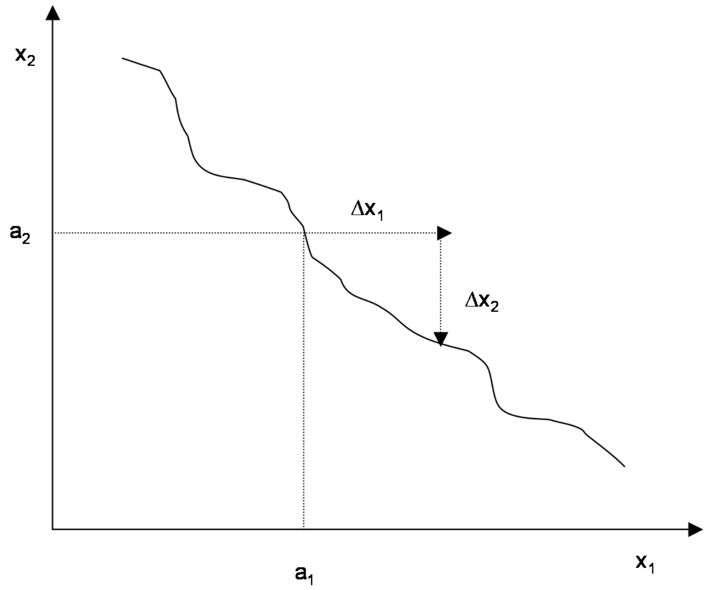
Soit une fonction d'utilité U(.) et un panier de biens donnés (a_1, a_2). Nous allons nous intéresser à l'ensemble des paniers de biens (x_1, x_2) qui procurent la même satisfaction au consommateur, tel que :

$$U(x_1, x_2) = U(a_1, a_2)$$

La représentation graphique s'appelle courbe d'indifférence passant par (a_1, a_2). L'équation ci-dessus a au moins une solution, le point (a_1, a_2). Y en t il d'autres ? On peut le penser du poins si l'on fait des hypothèses sur la fonction U(.) Ainsi, si c'est une fonction strictement croissante de x_1 et x_2, alors une légère augmentation de Δx_1 de x_1 doit être compensée par une baisse équivalente Δx_2 de x_2 pour ester sur la même courbe d'indifférence.

Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que si U(.) est continue et dérivable en (a_1, a_2), alors à chaque variation de Δx_1 correspond une et unue seule variation Δx_2, telle que la panier $(a_{1+}\Delta x_1, a_{2+}\Delta x_2) = U(a_1, a_2)$. En appliquant ce raisonnement de point en point, nous définissons une fonction implicite $\phi(.)$ de type $x_1 = \phi(x_1)$

Graphique 1 – Courbe d'indifférence



1.4 — La dérivée d'une fonction implicite

La microéconomie s'intéresse moins que les mathématiques aux conditions d'existence d'une fonction implicite et plus à sa forme, car nous sommes prêts a accepter son existence.

Si les conditions du théorème des fonctions implicites sont vérifiées au point (a_1, a_2), la fonction implicite $\varphi(.)$ ou $\phi(.)$ est dérivable en a_1 ou en a_2

Pour calculer sa dérivée son part de l'égalité :

$f\left(x_1,\phi(x_1)\right)=f\left(a_1,a_2\right)$

On dérive des deux cotés :

$$f'_{x_1}\left(x_1,\phi(x_1)\right)+f'_{x_2}f\left(x_1,\phi(x_1)\right)\left(\phi'(x_1)\right)=0$$

Et donc en faisant $x_1=a_1$ et en se rapellant que $a_2=\phi(a_1)$ on a :

$f'_{x_1}\left(a_1,a_2\right)+f'_{x_2}\left(a_1,a_2\right)\phi(a_1)=0$

Comme on suppose que $f'_{x_2}\left(a_1,a_2\right)\phi(a_1)\neq 0$ qui est la condition d'application du théorème des fonctions implicites, il vient :

$\phi'\left(a_1\right)=\dfrac{f'_{x_1}\left(a_1,a_2\right)}{f'_{x_2}\left(a_1,a_2\right)}$

et on obtient de la même façon :

$\varphi'\left(a_2\right)=\dfrac{f'_{x_2}\left(a_1,a_2\right)}{f'_{x_1}\left(a_1,a_2\right)}$

On peut donc connaître la valeur de la dérivée en un point d'une implicite – et donc la pente de la tangente à son graphe- sans connaître celle-ci. Pour cela il suffit de calculer les dérivées partielles de la fonction $f\left(.\right)$ qui est, elle, connue.

1.5. Exemple

Soit la fonction $f\left(.\right)$ définie par :

$f\left(x_1,x_2\right)=x_1^3x_2+\left(x_1,x_2\right)^{1/2}+3\ln x_1$

Et soit : $(a_1,a_2)=(1,1)$

Comme $f(1,1)=1^3.1x_2+\left(1,1\right)^{1/2}+3\ln.1=2$ la courbe de niveau passant par le point (1,1) a pour équation :

$$x_1^3x_2+\left(x_1,x_2\right)^{1/2}+3\ln x_1=2$$

La fonction $f(.)$ est de classe C^1 au point (1,1) et on a :

$$\begin{cases} f'_{x_1}\left(x_1,x_2\right)=3x_1^2x_2+\dfrac{1}{2}x_1^{-1/2}.x_2^{1/2}+\dfrac{3}{x_1} \\ f'_{x_2}\left(x_1,x_2\right)=x_1^3+\dfrac{1}{2}x_1^{1/2}.x_2^{-1/2} \end{cases}$$

Comme $f'_{x_2}\left(1,1\right)=1+1/2\neq 0$ les conditions d'applicabilité du théorème des fonctions implicites sont vérifiées. L' équation de la courbe de niveau passant par (1,1) définit donc une fonction implicite $\varphi(.)$ au voisinage de ce point , dont la dérivée est en $x_1=1$:

$$\phi'\left(1\right)=\frac{f'_{x_1}(1,1)}{f'_{x_2}(1,1)}=-\frac{6,5}{1,5}=-4,33$$